Capítulo 12

Integrales sobre superficies

En este capítulo estudiaremos la noción de área de superficies en $\mathbb{R}^3$, y las integrales de campos escalares y vectoriales definidos sobre éstas.

Una superficie es una variedad diferenciable de dimensión dos, que en este curso consideraremos siempre inmersa en el espacio $\mathbb{R}^3$. Recordemos que una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que todo punto p de S tiene un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap V$ coincide con el conjunto de ceros de una función $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $DF(q) \neq 0$ para todo $q \in V \cap S$.

En virtud del teorema de la función implícita, esto equivale a decir que todo punto p de S tiene un entorno abierto W en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap W$ puede verse como la gráfica de una función de clase C^1, es decir, $S \cap W$ es igual, bien al conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ para cierta f de clase C^1 en $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $z\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $y = g(x, z)$ para cierta g de clase C^1 en $W_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $y\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $x = h(y, z)$ para cierta h de clase C^1 en $W_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $x\}$. El ejemplo de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en $\mathbb{R}^3$ ilustra perfectamente las diversas situaciones.

Otra forma equivalente de definir una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ es decir que para cada punto p de S existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una función inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $S \cap V = \Phi(D)$, y que si $\Psi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es otra función con esta propiedad, entonces $\Psi^{-1} \circ \Phi : D \to A$ es un difeomorfismo de clase C^1.

A su vez esto equivale a decir que para todo punto $p \in S$ existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal

que su derivada $D\Phi(u,v)$ tiene rango 2 para todo $(u,v) \in D$, y $\Phi(D) = S \cap V$.

Recordemos también que el plano tangente TS_p a un punto p de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ se puede definir como el conjunto de vectores velocidad, en el punto p, de todas las curvas de clase C^1 cuya traza está contenida en S y que pasan por p. Si S está definida en un entorno de p por una ecuación implícita $F(x,y,z) = 0$ entonces $TS_p = \text{Ker} DF(p)$, es decir, el vector gradiente de F en p es perpendicular a TS_p. Por otro lado, si S está descrita en un entorno de p como imagen de un abierto D de $\mathbb{R}^2$ por una aplicación inyectiva Φ de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2, entonces $TS_p = D\Phi(u_p, v_p)(\mathbb{R}^2)$, donde $\Phi(u_p, v_p) = p$.

Conviene subrayar que TS_p es un plano vectorial. Para obtener el plano afín que pasa por p y es tangente a S en p, hay que sumar el punto p a dicho plano vectorial.

En este curso nos limitaremos a considerar casi en exclusiva un caso especial de superficie en $\mathbb{R}^3$, llamado superficie paramétrica simple, que es el de una superficie S que puede describirse, en su totalidad, como $\Phi(D)$, donde $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2 en todos los puntos, y D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ que puede describirse como la región interior a una curva cerrada simple regular a trozos (es decir, a la que se puede aplicar el Teorema de Green estudiado en el capítulo anterior).

Definición 12.1 (Superficie paramétrica simple) Se dice que una superficie S de $\mathbb{R}^3$ es una *superficie paramétrica simple* si existen un abierto acotado D de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es una curva cerrada simple regular a trozos, y una aplicación $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase C^1 tal que su diferencial $D\Phi(u,v)$ tiene rango 2 para todo $(u,v) \in D$, y además $S = \Phi(D)$.

De Φ diremos que es una parametrización de S. Evidentemente una misma superficie paramétrica simple S puede tener varias parametrizaciones diferentes.

En el caso de que Φ pueda extenderse (con las mismas propiedades) a un abierto mayor A que contenga a la adherencia de D, llamaremos *borde de S,* y denotaremos por ∂S, a la curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ definida por $\Phi(C)$, donde $C = \partial D$. Esta curva se supondrá siempre, salvo que se diga explícitamente lo contrario, orientada en el mismo sentido que resulte de componer Φ con una parametrización de C recorrida en sentido positivo. Del compacto $\overline{S} = \Phi(\overline{D})$ diremos que es una superficie paramétrica simple compacta y con borde.

Conviene señalar que, aunque empleemos la misma notación, el borde geométrico ∂S así definido de una tal superficie S *no coincide* con su frontera topológica (en efecto, ésta es toda $\overline{S}$ ya que S tiene interior vacío).

Ejemplo 12.2 Demostrar que el hemisferio norte de una esfera, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, es una superficie paramétrica simple con borde $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0$.

Definición 12.3 (Producto vectorial fundamental) Sea $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie paramétrica simple S. Denotemos

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$

Llamaremos producto vectorial fundamental al producto vectorial de las derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

es decir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v},$$

es decir el determinante jacobiano de la aplicación $(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v))$.

Observación 12.4 Recordemos que el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ tiene las siguientes propiedades (siendo a, b y c vectores de $\mathbb{R}^3$, y $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $a \times b = -b \times a$;
2. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
3. $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b$;
4. $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$;
5. $a \times b = 0$ si y sólo si a y b son linealmente dependientes;
6. si a y b son linealmente independientes entonces $a \times b$ es un vector perpendicular al plano generado por a y b, de norma $\|a\| \|b\| \operatorname{sen} \theta$ (donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo que forman a y b, es decir $\|a \times b\|$ es el área del paralelogramo determinado por a y b), y el sentido de $a \times b$ es el de avance o retroceso de un sacacorchos que gire de a hasta b.

Observación 12.5 Puesto que $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = D\Phi(u,v)(1,0)$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = D\Phi(u,v)(0,1)$ son vectores del plano tangente a S en $p = \Phi(u,v)$ y son linealmente independientes (por tener $D\Phi(u,v)$ rango 2), es inmediato, teniendo en cuenta la propiedad 6 de la Observación anterior, que el producto vectorial fundamental

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)$$

es un vector perpendicular a TS_p, donde $p = \Phi(u,v)$, es decir el producto vectorial fundamental define un campo vectorial perpendicular a la superficie S.

Ejemplo 12.6 Supongamos que S es la gráfica de una función de clase C^1 definida en un abierto D de $\mathbb{R}^2$, es decir, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\, z = f(x,y)\}$, donde $f : D \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Una parametrización natural de S es la proporcionada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

En este caso el producto vectorial fundamental viene dado por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) = -\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \mathbf{k}.$$

Definición 12.7 Se define el vector normal a una superficie paramétrica simple S parametrizada por $\Phi : D \to S$ en un punto p como

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)$$

para cada $p = \Phi(u,v) \in S$, y el vector normal unitario a S como

$$\mathbf{n}(p) = \frac{1}{\|\mathbf{N}(p)\|}\mathbf{N}(p).$$

Pasemos ahora a estudiar el concepto de *área* de una superficie paramétrica simple. Para justificar la definición, consideremos una parametrización $\Phi : D \to S$ de una superficie paramétrica simple S. Consideremos también, en el plano $\mathbb{R}^2$, que contiene a D, una cuadrícula muy fina paralela a los ejes de coordenadas. Las porciones de rectas de esta cuadrícula que están contenidas en D se transforman mediante la aplicación inyectiva Φ en curvas que no se cortan y que forman una *cuadrícula curva* dentro de S. Los *rectángulos curvos* de esta cuadrícula en S se aproximan bien, si la cuadrícula es suficientemente fina, por paralelogramos T en $\mathbb{R}^3$ (en general

ya no contenidos en S), que son imagen mediante la diferencial de Φ, en ciertos puntos $(u_Q, v_Q) \in D$ de la cuadrícula, de rectángulos Q de la cuadrícula original. Hágase un dibujo. El área de cada uno de los paralelogramos T viene dada por

$$\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, v(Q),$$

y la suma de todas estas áreas, que aproxima lo que intuitivamente debería ser el área de S, es

$$\sum_Q \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, v(Q),$$

que a su vez aproxima la integral

$$\int_D \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv,$$

tanto mejor cuanto más fina sea la cuadrícula. Es entonces natural definir el área de S como dicha integral.

Definición 12.8 Sea S una superficie paramétrica simple parametrizada por $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$. Definimos el área de S como la integral en D de la norma del producto vectorial fundamental asociado a Φ, es decir

$$a(S) = \int_D \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv.$$

Ejemplo 12.9 En el caso de que S sea la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$, la fórmula del ejemplo 12.6 para el producto vectorial fundamental asociado a su parametrización natural nos proporciona la siguiente fórmula para el área:

$$a(S) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Ejercicio 12.10 Usar esta fórmula para hallar el área del hemisferio norte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Es legítimo preguntarse si, dadas dos parametrizaciones diferentes $\Phi : D_\Phi \to S$ y $\Psi : D_\Psi \to S$ de una misma superficie S se cumple que

$$\int_{D_\Phi} \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv = \int_{D_\Psi} \|\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t)\| dsdt,$$

es decir si el área de una superficie está bien definida independientemente de su parametrización. La respuesta, como cabe esperar, es afirmativa, aunque aplazaremos la demostración de esta propiedad hasta después de las definiciones de integrales de campos escalares y vectoriales sobre superficies, ya que el hecho es que estas integrales tampoco dependen de la parametrización escogida (únicamente, en el caso de campos vectoriales, del sentido en que apunte la normal a la superficie).

Definición 12.11 Sea S una superficie paramétrica simple, parametrizada por $\Phi : D \to S$, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S. Definimos la integral de f sobre S como

$$\int_S f\, dS = \int_D f(\Phi(u,v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \| dudv.$$

Por otra parte, si $F : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definido sobre S, definimos la integral de F sobre S por

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_D F(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}(\Phi(u,v))\, dudv,$$

es decir, la integral del producto escalar de la normal a S con F, compuesto con Φ. Obsérvese que, puesto que

$$\mathbf{N}(\Phi(u,v)) = \mathbf{n}(\Phi(u,v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \|,$$

la integral del campo vectorial F sobre S puede verse como la integral del campo escalar $F \cdot \mathbf{n}$ sobre S, es decir, podemos denotar también

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_S F \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S, y entonces $\int_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

Por su parte, la integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S. Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el vector $F(x,y,z) = \rho(x,y,z)V(x,y,z)$, donde $V(x,y,z)$ es el vector velocidad del fluido y el número $\rho(x,y,z)$ es su densidad de masa, es un vector que nos dice cuánta

masa de fluido circula por el punto (x, y, z) en la dirección en que se mueve el fluido en ese punto, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $F \cdot \mathbf{n}$ representa el componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\mathbf{n}$, y la masa de fluido que pasa a través de toda S vendrá determinada por $\int_S F \cdot \mathbf{n} dS = \int_S F \cdot \mathbf{N}$.

Retomemos ahora la cuestión de la invariancia de estas integrales respecto de la parametrización escogida de S. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 12.12 *Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $\varphi : D_\Psi \to D_\Phi$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $(u, v) = \varphi(s, t)$. Entonces*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)},$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ denota el jacobiano de φ.

Demostración: Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s},$$

y también

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, utilizando las propiedades del producto vectorial consignadas en la Observación 12.4, y en particular usando que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

se obtiene la igualdad de enunciado. □

Teorema 12.13 *Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces*

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u, v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \| du dv = \int_{D_\Psi} f(\Psi(s, t)) \| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(u, v) \| ds dt.$$

Es decir, la integral $\int_S f dS$ definida en 12.11 no depende de la parametrización escogida. En particular, si tomamos $f \equiv 1$, obtenemos que el área de S no depende de la parametrización escogida.

Demostración: Denotemos $(u, v) = \varphi(s, t)$, donde $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$ como en el lema anterior. Se tiene que $\Psi = \Phi \circ \varphi$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema anterior obtenemos

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \| dudv =$$
$$\int_{D_\Psi} f(\Phi(\varphi(s,t))) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(s,t), v(s,t)) \| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| dsdt =$$
$$\int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t)) \| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(u,v) \| dsdt. \ \Box$$

El resultado análogo para campos vectoriales depende del sentido en que apunte la normal unitaria a S correspondiente a la parametrización en cuestión, como vemos a continuación.

Teorema 12.14 *Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, denotemos*

$$\mathbf{N}_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \ y \ \mathbf{N}_\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

y sean

$$\mathbf{n}_\Phi = \frac{1}{\|\mathbf{N}_\Phi\|} \mathbf{N}_\Phi, \ y \ \mathbf{n}_\Psi = \frac{1}{\|\mathbf{N}_\Psi\|} \mathbf{N}_\Psi.$$

Entonces, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p) = \mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p) = -\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$. En el primer caso diremos que las parametrizaciones Φ y Ψ inducen la misma orientación en S, y en el segundo caso diremos que inducen orientaciones opuestas.

Si Φ y Ψ inducen la misma orientación entonces, para todo campo vectorial continuo $F : S \to \mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\int_S F \cdot \mathbf{N}_\Phi = \int_S F \cdot \mathbf{N}_\Psi,$$

mientras que si Φ y Ψ inducen orientaciones opuestas en S entonces será

$$\int_S F \cdot \mathbf{N}_\Phi = -\int_S F \cdot \mathbf{N}_\Psi.$$

Demostración: Como $\mathbf{n}_\Phi(p)$ y $\mathbf{n}_\Psi(p)$ son vectores perpendiculares a TS_p para cada $p \in S$, definen una misma recta; como además ambos tienen norma uno, se tiene que $\mathbf{n}_\Phi(p) \cdot \mathbf{n}_\Psi(p) = 1$ o bien $\mathbf{n}_\Phi(p) \cdot \mathbf{n}_\Psi(p) = -1$ para cada $p \in S$. Pero, como las funciones $\mathbf{n}_\Phi, \mathbf{n}_\Psi : S \to \mathbb{R}^3$ son continuas y S es

conexa, debe tenerse $\mathbf{n}_\Phi \cdot \mathbf{n}_\Psi \equiv 1$ en toda S o bien $\mathbf{n}_\Phi \cdot \mathbf{n}_\Psi \equiv -1$ en toda S. En el primer caso se tiene que $\mathbf{n}_\Phi(p) = \mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$, y en el segundo caso que $\mathbf{n}_\Phi(p) = -\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$.

Por otra parte, si recordamos que

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_S F \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

el enunciado sobre las integrales es consecuencia inmediata de esta propiedad y del Teorema 12.13. □

Una vez definidos los conceptos de área y de integral sobre una superficie paramétrica simple podemos extenderlos a muchas otras superficies que, sin ser paramétricas simples, pueden descomponerse como unión finita de superficies paramétricas simples que son disjuntas entre sí salvo quizás en curvas de clase C^1 a trozos (que tienen área nula por definición). Por ejemplo, una esfera no es una superficie paramétrica simple, pero puede descomponerse como su hemisferio norte más el hemisferio sur, que sí que son superficies paramétricas simples y disjuntas salvo en el ecuador, que es una curva de clase C^1. El área de la esfera puede definirse entonces como el área del hemisferio norte más la del hemisferio sur. Lo mismo puede hacerse con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$. Por su parte un toro puede verse como unión de dos cilindros curvos pegados por las circunferencias de sus bordes, y por tanto puede expresarse como unión de cuatro superficies paramétricas simples disjuntas dos a dos salvo en curvas de clase C^1.

De hecho, puede demostrarse (aunque no lo haremos aquí) que toda superficie compacta S en $\mathbb{R}$ puede descomponerse en una cantidad finita $S_1, ..., S_N$ de superficies paramétricas simples que sólo se cortan una a otra a lo sumo en curvas de clase C^1 a trozos. Entonces podemos definir el área de S como la suma de las áreas de las S_i, $i = 1, ..., N$. Por supuesto habría que probar que si $S'_1, ..., S'_M$ es otra descomposición de S en superficies paramétricas simples que sólo se cortan en curvas C^1 a trozos, entonces la suma de las áreas de $S'_1, ..., S'_M$ es igual a la suma de las áreas de $S_1, ..., S_N$, lo cual no es difícil y se deja como ejercicio para el lector.

De manera análoga pueden extenderse los conceptos de integral de funciones escalares y de campos vectoriales a toda superficie compacta en $\mathbb{R}^3$.

Estas observaciones muestran que el habernos limitado a estudiar el área de las superficies paramétricas simple y las integrales sobre éstas no supone en la práctica apenas ninguna restricción.

Problemas

12.15 Calcular el área de las superficies siguientes:

(a) La parte de la esfera unitaria dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

(b) La parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ interior al cilindro $x^2+y^2 = Ry$.

(c) La parte del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

12.16 Sean $0 < b < a$. Calcular el área del toro obtenido al girar la circunferencia del plano xz con centro en $(a, 0, 0)$ y radio b en el plano xz alrededor del eje z. Las ecuaciones paramétricas del toro son:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos v)\cos u \\ y &= (a + b\cos v)\sin u \\ z &= b\sin v, \end{aligned}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Hallar también la mormal exterior unitaria a la superficie del toro. En el dibujo, $a = 5$, y $b = 1$.

12.17 En los siguientes casos, calcular la integral de f sobre la superficie S:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0$, $(0, 1, 1)$.

(c) $f(x, y, z) = z$; $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

12.18 Determinar la masa de una lámina circular de radio R, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro, y vale 1 en el borde.

12.19 En los siguientes casos, calcular la integral del campo F sobre la superficie S.

(a) $F(x, y, z) = (x, y, -y)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior.

(b) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$; S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientada con la normal exterior.

(c) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$, orientada con la normal exterior.

(d) $F(x,y,z) = (x, y, z)$; $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada con la normal exterior.

12.20 Demostrar que el área de la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ obtenida al girar la gráfica de $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (en el plano xz) alrededor del eje z es

$$2\pi \int_a^b u\sqrt{1 + f'(u)^2}du.$$